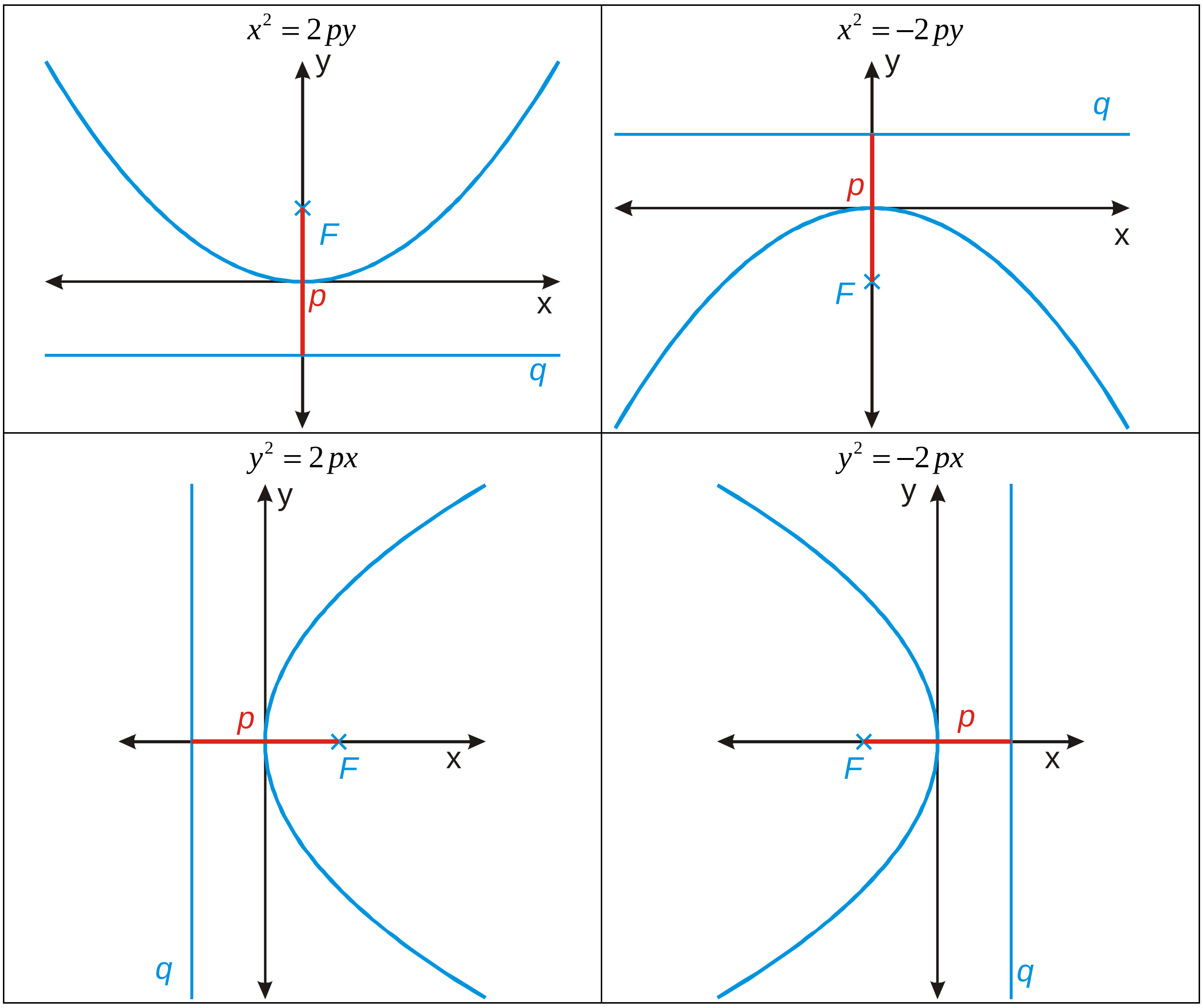
7.5.13 Rovnice paraboly

Předpoklady: 7512

Př. 1: Sepiš všechny rovnice pro paraboly a nakresli k nim odpovídající obrázky. Na každém obrázku vyznač ohnisko, řídící přímku a vzdálenost *p*.



Pedagogická poznámka: Sepsání parabol je důležité, studenti budou v dalším průběhu hodiny často nahlížet. Stejně tak považuji za vhodné, když si studenti několikrát do obrázku nakreslí vzdálenost *p*, zvětšuje se tak pravděpodobnost, že si při řešení příkladů budou pamatovat její význam.

Zatím známe rovnice parabol, jejichž vrcholy leží v počátku soustavy souřadnic.
Elipsa:

- střed $S[0;0]$ v počátku $\Rightarrow$ rovnice $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,
- střed v bodě $S[m;n]$ $\Rightarrow$ rovnice $\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$.

Jak se změní rovnice paraboly $x^2 = 2py$, kterou posuneme tak, aby se její vrchol přemístil z bodu $[0;0]$ do bodu $V[m;n]$?

Zřejmě na rovnici $(x-m)^2 = 2p(y-n)$. Rovnice se nazývá vrcholová (protože z ní můžeme zjistit souřadnice vrcholu).

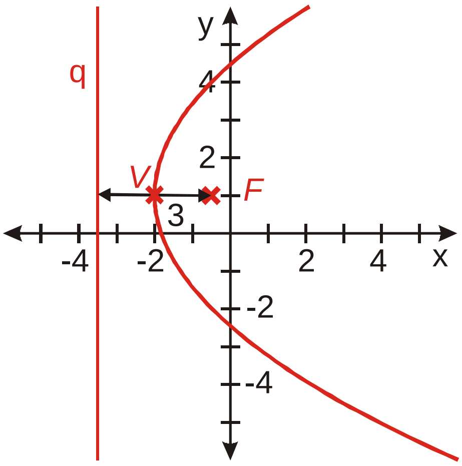
Paraboly s vrcholem v bodě $V[m;n]$ a osou rovnoběžnou s osou *y* a vzdáleností $|Fq| = p$ mají vrcholové rovnice $(x-m)^2 = \pm 2p(y-n)$.

Paraboly s vrcholem v bodě $V[m;n]$ a osou rovnoběžnou s osou *x* a vzdáleností $|Fq| = p$ mají vrcholové rovnice $(y-n)^2 = \pm 2p(x-m)$.

Poznámka: Stejně jako u elipsy nebudeme pracovat s parabolami, jejichž osy nejsou rovnoběžné s jednou ze souřadných os. Jejich rovnice jsou složitější.

Př. 2: Urči souřadnice vrcholu, ohniska a rovnici řídící přímky paraboly, která je dána rovnicí $(y-1)^2 = 6(x+2)$.

Upravíme rovnici: $(y-1)^2 = 2\cdot 3(x+2) \Rightarrow$ vrchol: $V[-2;1]$, parametr $p = 3$.

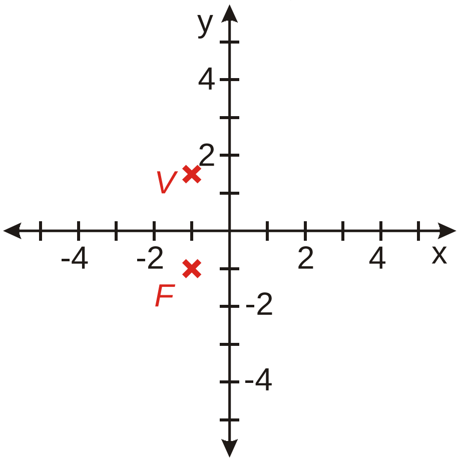


Ohnisko: $F\left[-2+\frac{3}{2};1\right] = \left[-\frac{1}{2};1\right]$, řídící přímka: $x = -2-\frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$.

Pedagogická poznámka: Objevuje se hned několik chyb z nepozornosti: souřadnice vrcholu $V[1;-2]$ (kvůli automatickému přiřazování druhé mocniny *x*-vé souřadnici), špatně nakreslený obrázek (parabola se svislou osou) a špatné použití parametru *p* (použití rovnosti $p = 6$).

Př. 3: Napiš vrcholovou rovnici paraboly s vrcholem v bodě $V\left[-1;\frac{3}{2}\right]$ a ohniskem $F\left[-1;-1\right]$.

Nakreslíme si oba body:



Body leží nad sebou $\Rightarrow$ osa paraboly bude rovnoběžná s osou *y*, parabola bude orientována směrem dolů $\Rightarrow$ rovnice typu $(x-m)^2=-2p(y-n)$.

Platí: $|VF|=\frac{5}{2}=\frac{p}{2}\Rightarrow p=5$.

Dosadíme do rovnice souřadnice vrcholu a velikost *p*: $(x+1)^2=-2\cdot 5\left(y-\frac{3}{2}\right)$.

Pedagogická poznámka: U obou předchozích příkladů i u příkladů následujících je důležité načrtnutí obrázku paraboly. Podle obrázku je pak dopočítání požadovaných údajů snadné.

Nejčastějším problémem je, že si studenti nepamatují rovnost $|Fq|=p$ a místo ní používají špatnou $|FV|=p$.

Stejně jako u kružnice a elipsy i u vrcholové rovnice paraboly můžeme umocnit a roznásobit závorky, posčítat, co půjde, a tak získat obecnou rovnici paraboly.

Parabolu, jejíž osa je rovnoběžná s osou *y*, můžeme vyjádřit také obecnou rovnicí paraboly $x^2+2rx+2sy+t=0$.

Parabolu, jejíž osa je rovnoběžná s osou *x*, můžeme vyjádřit také obecnou rovnicí paraboly $y^2+2rx+2sy+t=0$.

Stejně jako u kružnice a elipsy budeme muset převést obecnou rovnici na vrcholovou, abychom zjistili, o jakou parabolu jde.

Př. 4: Urči vrchol, ohnisko a řídící přímku paraboly dané rovnicí $x^2+2x-3y-2=0$. Načrtni obrázek paraboly.

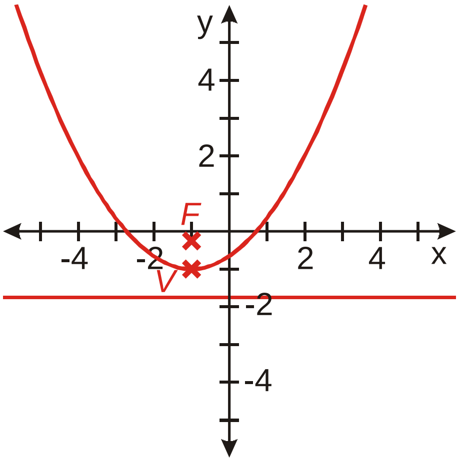
Upravujeme nejdřív závorku pro souřadnici *x*: $x^2+2x-3y-2=0$

$x^2+2x\cdot 1+1^2-1^2=3y+2$

$(x+1)^2=3y+3$

$(x+1)^2=3(y+1)$

$(x+1)^2=2\cdot\frac{3}{2}(y+1) \Rightarrow$ vrchol: $V[-1;-1]$, parametr $p=\frac{3}{2}$.



Ohnisko: $F\left[-1;-1+\frac{3}{4}\right]=\left[-1;-\frac{1}{4}\right]$, řídící přímka: $y=-1-\frac{3}{4}=-\frac{7}{4}$.

Pedagogická poznámka: Nejčastější chybou je předčasné vytýkání na pravé straně, které předchází konečně úpravě levé strany na druhou mocninu.

Př. 5: Urči vrchol, ohnisko a řídící přímku paraboly dané rovnicí:

a) $x^2-4x+6y+4=0$ b) $y^2-6x-10=0$

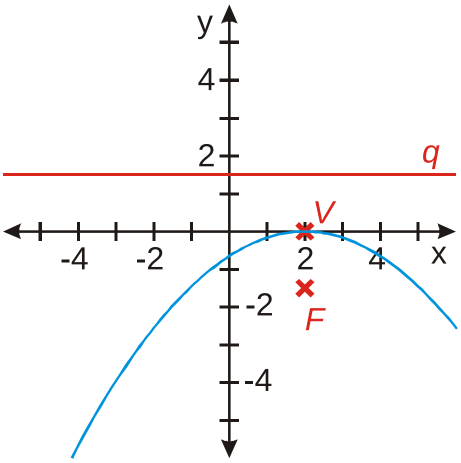
c) $y^2+y+4x+3=0$.

a) $x^2-4x+6y+4=0$

Upravujeme nejdřív závorku pro souřadnici *x*: $x^2-2x\cdot 2+2^2-2^2=-6y-4$

$(x-2)^2-4=-6y-4$

$(x-2)^2=-2\cdot 3y \Rightarrow$ vrchol: $V[2;0]$, parametr $p=3$.



Osa paraboly je rovnoběžná s osou *y*, parabola je orientována směrem dolů $\Rightarrow$

ohnisko: $F\left[2;0-\frac{3}{2}\right]=\left[2;-\frac{3}{2}\right]$,

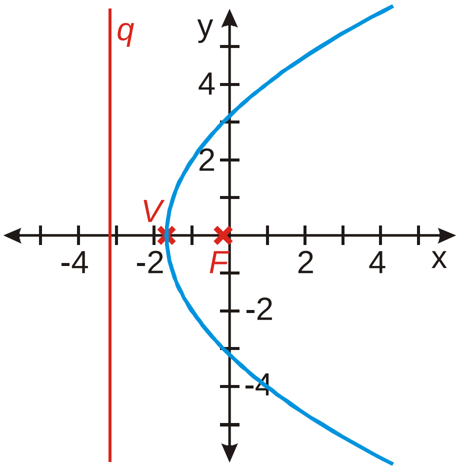
řídící přímka: $y=\frac{3}{2}$.

b) $y^2-6x-10=0$

Upravujeme nejdřív závorku pro souřadnici *y*: $y^2=6x+10$.

$$y^2=6\left(x+\frac{10}{6}\right)$$

$y^2=2\cdot 3\left(x+\frac{5}{3}\right)$ $\Rightarrow$ vrchol: $V\left[-\frac{5}{3};0\right]$, parametr $p=3$.



Osa paraboly je rovnoběžná s osou *x*, parabola je orientována směrem doprava $\Rightarrow$

ohnisko: $F\left[-\frac{5}{3}+\frac{3}{2};0\right]=\left[-\frac{1}{6};0\right]$,

řídící přímka: $x=-\frac{5}{3}-\frac{3}{2}=-\frac{19}{6}$.

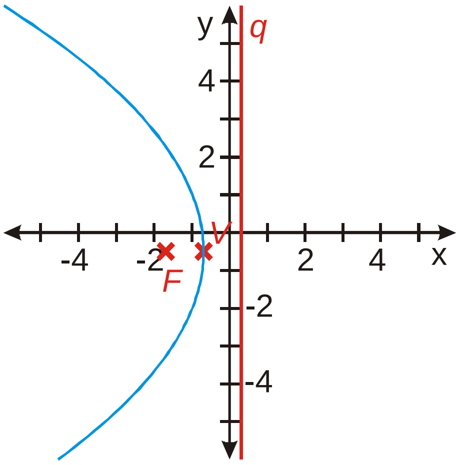
c) $y^2+y+4x+3=0$

Upravujeme nejdřív závorku pro souřadnici *y*: $y^2+2y\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=-4x-3$.

$$\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=-4x-3+\frac{1}{4}$$

$$\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=-4x-\frac{11}{4}$$

$\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=-2\cdot 2\left(x+\frac{11}{16}\right)$ $\Rightarrow$ vrchol: $V\left[-\frac{11}{16};-\frac{1}{2}\right]$, parametr $p=2$.



Osa paraboly je rovnoběžná s osou x, parabola je orientována směrem doleva $\Rightarrow$

ohnisko: $F\left[-\frac{11}{16}-1;-\frac{1}{2}\right]=\left[-\frac{27}{16};-\frac{1}{2}\right]$,

řídící přímka: $x=-\frac{11}{16}+1=\frac{5}{16}$.

Pedagogická poznámka: Největší problémy jsou u bodu b), kde mnoho studentů vytýká do tvaru $y^2=2(3x+5)$, aby se vyhnuli zlomkům v závorce. Opět je dobré zdůraznit, že jde nematematickou myšlenku, protože nic nezakazuje zlomky v souřadnicích bodů, zatímco požadavek na to, aby se v závorce vyskytovalo pouze x nenásobené žádným číslem, vyplývá z rovnice $(y-n)^2=-2p(x-m)$ zcela jednoznačně.

Pedagogická poznámka: Paraboly na obrázcích v učebnici jsou kresleny v reálném tvaru. Na obrázky v sešitech není dobré klást takové nároky, stačí, když budou procházet správným vrcholem a budou mít správnou orientaci.

Př. 6: (BONUS) Šikmý vrh je při vhodné volbě souřadnic popsán pomocí souřadnic takto: $x=vt\cos\alpha$ a $y=vt\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2$.

a) Dokaž, že body z předpisu leží na parabole. b) Najdi vrchol této paraboly.

Rovnice paraboly neobsahuje jiné proměnné než souřadnice $\Rightarrow$ musíme ze zadané soustavy rovnic vyloučit t $\Rightarrow$ vyjádříme ho z první a dosadíme do druhé rovnice.

$$x=vt\cos\alpha \Rightarrow t=\frac{x}{v\cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad y=v\frac{x}{v\cos\alpha}\sin\alpha-\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v\cos\alpha}\right)^2.$$

$$y=x\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{g}{2v^2\cos^2\alpha}x^2$$ - obecná rovnice paraboly, převedeme na středový tvar.

$$\frac{g}{2v^2\cos^2\alpha}x^2-x\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-y$$

$$\frac{g}{2v^2\cos^2\alpha}\left(x^2-x\frac{2v^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}\right)=-y$$

$$x^2-2x\frac{v^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}+\left(\frac{v^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}\right)^2-\left(\frac{v^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}\right)^2=-y\frac{2v^2\cos^2\alpha}{g}$$

$$\left(x-\frac{v^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}\right)^2=-y\frac{2v^2\cos^2\alpha}{g}+\left(\frac{v^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}\right)^2$$

$$\left(x-\frac{v^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}\right)^2=-y\frac{2v^2\cos^2\alpha}{g}+\frac{v^4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{g^2}$$ (vytkneme tak, aby před y nebylo nic)

$$\left(x-\frac{v^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}\right)^2=-\frac{2v^2\cos^2\alpha}{g}\left(y-\frac{v^2\sin^2\alpha}{2g}\right)$$

Souřadnice vrcholu $V\left[\frac{v^2\sin\alpha\cos\alpha}{g};\frac{v^2\sin^2\alpha}{2g}\right]$.

Dodatek: Souřadnice vrcholu odpovídají vzorcům pro dostřel šikmého vrhu $d=\frac{2v^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}$ (dvojnásobek x-ové souřadnice vrcholu) a maximální výšku výstupu $h_{max}=\frac{v^2\sin^2\alpha}{2g}$ (y-ová souřadnice vrcholu).

Př. 7: Petáková:
strana 128/cvičení 77 c) e) f)
strana 129/cvičení 79 d)

Shrnutí: Vrcholovou rovnici paraboly získáme velmi podobně jako středovou rovnici elipsy.